

## **Modelowanie i programowanie matematyczne w zarządzaniu stadem bydła**

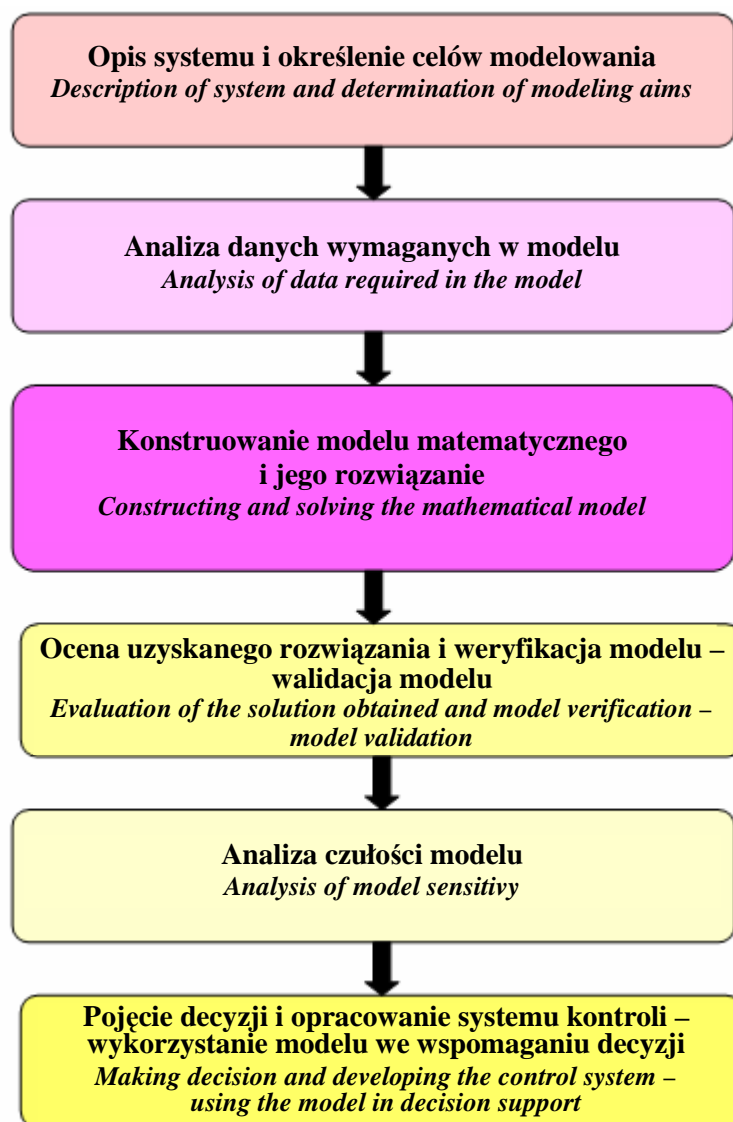
**Anna Stygar, Joanna Makulska**

*Uniwersytet Rolniczy w Krakowie,  
Katedra Hodowli Bydła, al. Mickiewicza 24/28, 30-059 Kraków*

Świadoma działalność ludzka nierozzerwalnie wiąże się z aktem podejmowania decyzji. Wybór decyzji optymalnych jest problemem złożonym, do rozwiązania którego nie zawsze wystarcza duże doświadczenie poparte intuicją. I tak na przykład, aby podejmować optymalne decyzje w zarządzaniu stadem zwierząt gospodarskich należy posiadać obszerną wiedzę na temat aktualnego stanu stada, czynników wewnętrznych i zewnętrznych wpływających na zmiany tego stanu, wzajemnych zależności między nimi, wpływu różnych działań na potencjalny wynik hodowlany, produkcyjny i ekonomiczny, a także istniejących ograniczeń dotyczących niektórych działań. Tradycyjne sposoby wspomaganie decyzji podejmowanych przez farmerów polegają na stosowaniu ogólnych norm, standardów i zaleceń lub na doradztwie eksperckim (np. konsultacje zootechniczne, weterynaryjne). Pierwsza metoda nie uwzględnia jednak zróżnicowania systemów produkcji, indywidualnych preferencji farmerów oraz specyficznych dla danego przypadku uwarunkowań i ograniczeń, co sprawia, że podejmowane decyzje zwykle nie są optymalne. Doradztwo eksperckie odnosi się wprawdzie do konkretnych sytuacji decyzyjnych, jednakże umysł ludzki posiada ograniczone możliwości tworzenia optymalnych rozwiązań na podstawie wielu źródeł informacji, cechujących się dodatkowo określonym stopniem niepewności (Kristensen i Jørgensen, 1998).

Obiektywna ocena i wyważenie różnych

wariantów działania, a w konsekwencji podjęcie decyzji optymalnej jest łatwiejsze dzięki wykorzystaniu metod zwanych badaniami operacyjnymi. Obejmują one modelowanie i programowanie matematyczne (Jędrzejczyk i in., 2004) (rys. 1). Model jest uproszczoną reprezentacją systemu (fermy, przedsiębiorstwa, procesu produkcyjnego), służącą do wykrywania ilościowych relacji, jakie zachodzą między wartościami zmiennych występujących w badanym systemie i przewidywania efektów zmian wartości tych zmiennych (Jalvingh, 1992). Rozwiązanie modelu jest jednoznaczne z wyznaczeniem decyzji optymalnych. Na ogół w określonych warunkach istnieje wiele decyzji, które mogą zostać podjęte. Są to tzw. decyzje dopuszczalne. Uznanie decyzji dopuszczalnej za optymalną wynika z przyjętego kryterium (minimalizacji nakładów, maksymalizacji efektywności itd.). Poszukiwanie decyzji optymalnej, czyli optymalizacja, polega zatem na maksymalizacji lub minimalizacji tzw. funkcji celu określonej na zbiorze decyzji dopuszczalnych. Algorytmy obliczeniowe modelu wykorzystywane są do konstruowania programów komputerowych wspomagających wyznaczanie rozwiązań optymalnych. Dzięki możliwości wprowadzania wartości zmiennych i parametrów techniczno-ekonomicznych właściwych dla konkretnej sytuacji decyzyjnej programy te stanowią efektywne narzędzie, coraz częściej wykorzystywane w informatycznych systemach zarządzania działalnością hodowlaną i produkcyjną.



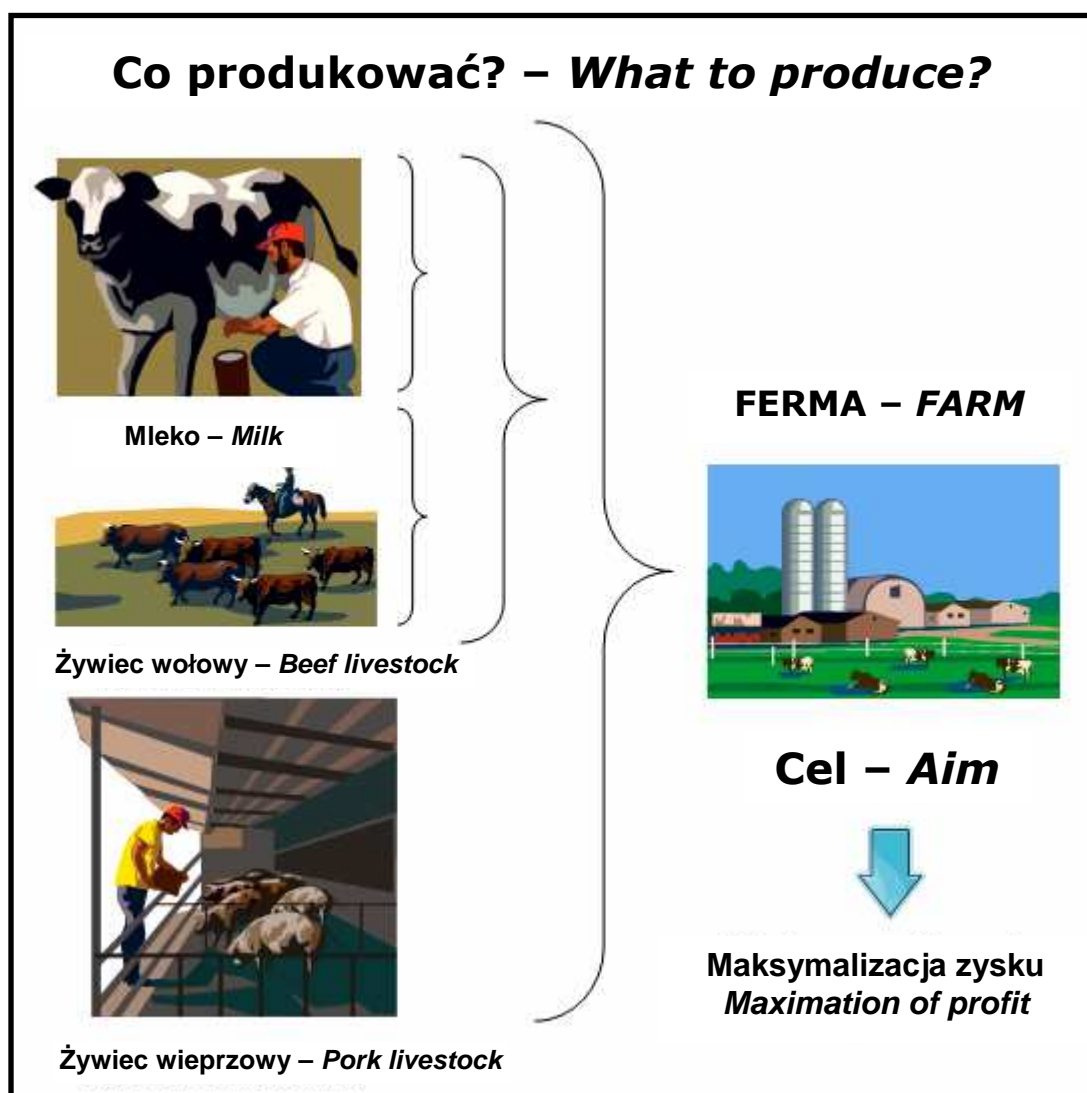
Rys. 1. Etapy w procesie podejmowania decyzji przy pomocy modelowania i programowania matematycznego

Fig. 1. Stages of the decision-making process using mathematical modeling and programming

Przykładem problemu decyzyjnego, który można rozwiązać przy wykorzystaniu metod modelowania i programowania matematycznego jest określenie optymalnej struktury i skali produkcji na fermie zwierząt (rys. 2). Przyjęte alternatywne opcje to np.: produkcja tylko mleka,

tylko żywca wołowego, mleka i żywca wołowego lub mleka, żywca wołowego i żywca wieprzowego.

Zazwyczaj celem jest maksymalizacja zysku rozumianego jako różnica między przychodami z produkcji a poniesionymi nakładami.



Rys. 2. Przykład problemu decyzyjnego, możliwego do rozwiązania przy zastosowaniu metod modelowania i programowania matematycznego

Fig. 2. Example of a decision problem that can be solved using mathematical modeling and programming methods

### Programowanie dynamiczne

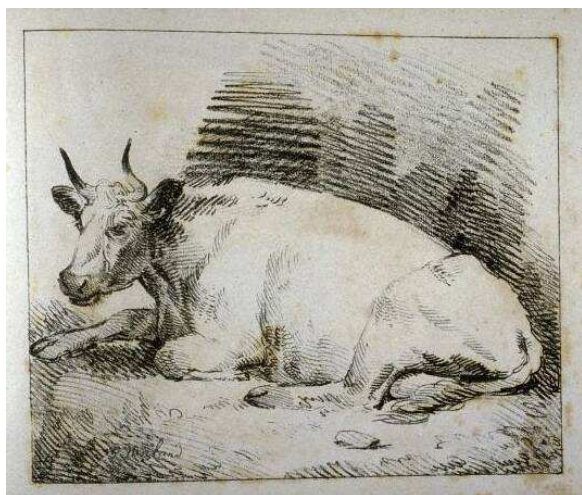
Wyznaczanie rozwiązań optymalnych w hodowli i produkcji zwierzęcej realizuje się przy wykorzystaniu technik programowania matematycznego, spośród których szczególną rolę odgrywa programowanie dynamiczne, uwzględniające czynnik czasu (Bellman, 1957; Bellman i Dreyfus, 1967; Wentcel, 1966). Stanowi ono dział matematyki, pozwalający realizować optymalne sterowanie wieloetapowych (sekwencyjnych) procesów poprzez wyznaczanie działań (decyzji) optymalnych na każdym etapie. Programowanie dyna-

miczne wykorzystuje się do optymalizacji procesów o ograniczonym lub nieograniczonym czasie trwania (tzw. horyzont planowania). W każdym etapie procesu określa się jego stan oraz podejmuje decyzję. Stan procesu opisywany jest poprzez zbiór parametrów zwanych zmiennymi stanu (np. masa ciała, wiek zwierzęcia). Zwykle zakłada się, że przestrzenie stanów i decyzji są zbiorami skończonymi. Decyzja optymalna dla wszystkich kombinacji zmiennych stanu wyznaczana jest poprzez maksymalizację (lub minimalizację) zdefiniowanej uprzednio funkcji celu. Wpływa ona w sposób

deterministyczny lub stochastyczny na stan obserwowany w następnym etapie. Pochodną decyzji podjętej w danym etapie i stanie jest wynik produkcyjny lub ekonomiczny. Przypisanie każdej kombinacji etapu i stanu określonych decyzji dopuszczalnych nosi nazwę strategii (polityki). Wyznaczenie strategii optymalnej dla danego procesu polega na określeniu ciągu stanów i decyzji optymalizujących wartość zdefiniowanej funkcji celu (Kristensen, 1994).

### Hierarchiczne procesy Markova (Hierarchic Markov Processes – HMP)

Konstruując modele dynamiczne uwzględniające większą liczbę zmiennych napotyka się na tzw. problem wielowymiarowości. Wynika on z faktu, iż zmienne mogą przyjmować wiele różnych wartości, a w związku z tym przestrzeń stanów (definiowana jako iloczyn liczby zmiennych i przyjmowanych przez nie wartości) staje się bardzo duża. W celu umożliwienia rozwiązania tego typu problemów A.R. Kristensen opracował teorię hierarchicznych procesów Markova (Kristensen, 1988, 1996). Za podstawę przyjął metodę zwaną procesami decyzyjnymi Markova lub programowaniem decyzyjnym Markova, stanowiącą połączenie idei programowania dynamicznego z matematyczną koncepcją łańcuchów Markova (Howard, 1960).

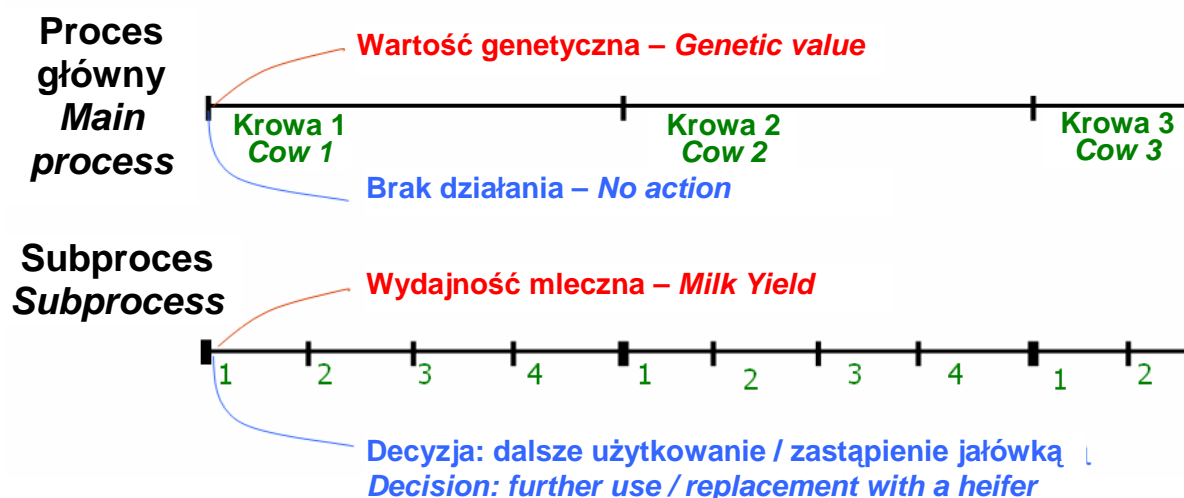


Hierarchiczne procesy Markova są serią procesów decyzyjnych, zwanych subprocesami, tworzących jeden proces główny. Zakłada się, że

proces główny posiada nieskończoną liczbę etapów, ale skończoną liczbę stanów. Każdemu stanowi w procesie głównym odpowiada odrębny proces decyzyjny (subproces) o określonej długości czasu i skończonej liczbie stanów. Liczba subprocesów równa jest zatem liczbie stanów w procesie głównym, a długość etapu w procesie głównym równa się całkowitej długości odpowiadającego mu subprocesu. Metoda ta jest szczególnie przydatna do modelowania procesów decyzyjnych o nieokreślonym czasie trwania, w których kolejne etapy subprocesów wiążą się z wiekiem zwierzęcia. Można wtedy nie włączać do obliczeń wieku zwierzęcia – jako oddzielnej zmiennej stanu – co pozwala znacznie zmniejszyć rozmiary modelu (Kristensen, 1988, 1996).

Jak dotąd, programowanie dynamiczne z rozszerzeniem o hierarchiczne procesy Markova stosowane było najczęściej do wspomagania zarządzania stadami bydła (przykłady w niniejszym artykule) i trzody chlewnej. Jednym z najistotniejszych problemów decyzyjnych w zarządzaniu stadem jest problem rotacji, czyli „zastępowania” użytkowanego zwierzęcia kolejnym osobnikiem. Jego rozwiązanie polega na określeniu warunków (wiek, produktywność itd.), w których „zastąpienie” można uznać za działanie optymalne z punktu widzenia przyjętego kryterium (Kristensen, 2003). W roku 1987 A.R. Kristensen opracował model, w którym po raz pierwszy wykorzystał teorię hierarchicznych procesów Markova do rozwiązania problemu „zastępowania” krów jałówkami w stadzie bydła mlecznego (Kristensen, 1987) (rys. 3). W modelu tym krowa charakteryzowana była poprzez: klasę genetyczną określoną na podstawie wartości hodowlanej ojca, numer laktacji, etap laktacji, wydajność mleka w poprzedniej i bieżącej laktacji oraz długość okresu międzywycieleniowego. Jako kryterium optymalizacji przyjęto maksymalizację wartości zysku przy nieskończonym horyzoncie planowania. Uzyskane rozwiązania pozwalały uszeregować krowy w stadzie według spodziewanego zysku z dalszego ich użytkowania oraz określić optymalny moment „zastąpienia” jałówkami.

W roku 1989 Kristensen przedstawił kolejną wersję modelu, w której uwzględnił kwoty mleczne jako czynnik ograniczający produkcję mleka (Kristensen, 1989).



**Proces główny: - Main process:**

- ❖ **Etap: Okres życia krowy – Stage: Cows period of life**
- ❖ **Stan: Wartość genetyczna – State: genetic value**
- ❖ **Działanie (decyzja): Brak działania – Action (decision): No action**

**Subproces: – Subprocess:**

- ❖ **Etap: Laktacja – Stage: Lactation**
- ❖ **Stan: Wydajność mleczna (stan zależny od wartości genetycznej i numeru laktacji) – State: Milk yield (state dependent on genetic value and lactation number)**
- ❖ **Działanie (decyzja): Dalsze użytkowanie / zastąpienie jałówką – Action (decision): Further use / replacement with a heifer**

Rys. 3. Ilustracja wykorzystania hierarchicznych procesów decyzyjnych Markowa do rozwiązania problemu „zastąpienia” krów jałówkami w stadzie bydła mlecznego, wg A.R. Kristensena – „The dairy cow replacement model as a hierarchical process”, materiały kursu „Advanced Herd Management”, Faculty of Life Science, University of Copenhagen, sierpień – październik 2008

Fig. 3. Illustration of using hierarchic Markov processes to solve the problem of "replacing" cows with heifers in a dairy herd according to A.R. Kristensen – “The dairy cow replacement model as a hierarchical process”, materials of the course "Advanced Herd Management", Faculty of Life Science, University of Copenhagen, August – October 2008

Innym ważnym przykładem zastosowania metody HMP do wspomaganie ekonomicznie optymalnych decyzji dotyczących terminu inseminacji i rotacji krów w stadach charakteryzujących się wysoką częstotliwością występowania mastitis jest model opracowany w 1994

roku przez Houbena i innych (Houben i in., 1994). W modelu tym zmiennymi stanu były informacje na temat występowania u krowy klinicznych objawów mastitis, jej produktywność w poprzedniej i bieżącej laktacji oraz długość okresu międzywycieleniowego. Ze względu na



znaczną liczbę klas w obrębie każdej zmiennej stanu, liczba różnych stanów, w których krowa mogła się znaleźć w czasie swojego życia wyniosła aż 6 821 724. Czas komputerowy potrzebny do uzyskania optymalnych rozwiązań uznano za możliwy do zaakceptowania, jednakże istotnie ograniczającą dalszą rozbudowę modelu.

Metoda HMP została też wykorzystana do ekonomicznej optymalizacji decyzji dotyczących odchowu i zacielenia jałówek ras mlecznych. W opracowanym przez Mourits i in. (1999) modelu odchów jałówki traktowany jest jako wyodrębniona działalność, rozpoczynająca się w chwili urodzenia jałówki i zakończona jej sprzedażą. Stan jałówki opisywany jest poprzez wiek, sezon urodzenia, masę ciała, dobowe przyrosty masy ciała w okresie do uzyskania dojrzałości płciowej oraz status reprodukcyjny (zacielona/niezacielona). Optymalizuje się decyzje dotyczące intensywności żywienia jałówki, terminu inseminacji i „zastąpienia” rozumianego jako wprowadzenie do stada jałówek kolejnej osobniczki w miejsce wybrakowanej jałówki niezacielonej lub sprzedanej jałówki zacielonej. Parametry wejściowe do modelu oszacowano na podstawie informacji z ferm holenderskich. Model został następnie zaadaptowany do warunków odchowu jałówek na fermach amerykańskich (Mourits i in., 2000).

Kolejne zastosowanie metody HMP do optymalizacji zarządzania stadem bydła zostało opisane w pracy Makulskiej i Kristensena (1999). Autorzy ci przedstawili teoretyczne założenia modelu umożliwiającego wspomaganie decyzji dotyczących przebiegu indywidualnego i grupowego opasu buhajków różnych ras, przy założeniu zróżnicowanych warunków techniczno-ekonomicznych. W opisie indywidualnym stan buhajka opisywany był przez miesiąc jego urodzenia i aktualną masę ciała, a decyzje dotyczyły intensywności żywienia oraz skierowania do rzeźni lub dalszego opasu. W opisie grupowym zmiennymi stanu były średnia masa ciała buhajka w obrębie grupy i liczba buhajków aktualnie pozostających w boksie. Decyzje, podobnie jak w opisie indywidualnym, dotyczyły intensywności żywienia oraz skierowania do rzeźni lub dalszego opasu, ale podejmowane były dwuetapowo: w pierwszym etapie podejmowano decyzje o uboju pojedynczych zwierząt, w drugim – decyzje o uboju pozostałych

buhajków, tak aby opróżnić boks i wprowadzić do niego nową grupę. Zależnie od rodzaju opasu (indywidualny, grupowy) jako kryterium optymalizacji przyjęto maksymalizację nadwyżki bezpośredniej w przeliczeniu na buhajka lub grupę buhajków.

### **Wielopoziomowe hierarchiczne procesy Markova (Multi-Level Hierarchic Markov Processes – MLHMP)**

Wykorzystanie teorii HMP stanowiło istotne ułatwienie w rozwiązywaniu modeli o stosunkowo dużych rozmiarach. Jednak dopiero dzięki opracowanej przez Kristensena i Jørgensena (1998) metodzie wielopoziomowych hierarchicznych procesów decyzyjnych Markova (MLHMP) można rozwiązywać modele posiadające olbrzymie przestrzenie stanów i decyzji. Użycie metody MLHMP pozwala rozszerzyć strukturę hierarchiczną modelu (proces główny, subprocesy) o kolejne poziomy, a horyzonty planowania na poszczególnych poziomach mogą być różne. Wielopoziomowe hierarchiczne procesy Markova są szczególnie cennym narzędziem do wyznaczania optymalnej długości użytkowania i momentu zastąpienia zwierzęcia w stadzie kolejnym osobnikiem (Kristensen, 2003). Przykładem może być model optymalizacji przebiegu i długości opasu oraz ubojowej masy ciała walców skonstruowany przez Nielsen i Kristensena (2002). Kolejne wersje i aplikacje tego modelu zostały opisane w pracach Nielsen i in. (2004) oraz Nielsen i Kristensena (2007). Model posiada strukturę 4-poziomowego hierarchicznego procesu Markova, w którym decyzje zdefiniowane są na trzech poziomach. Dotyczą one rodzaju wykorzystywanych pastwisk, intensywności żywienia zimowego, momentu rozpoczęcia końcowej fazy opasu oraz terminu uboju.

Metoda programowania dynamicznego z rozszerzeniem o wielopoziomowe hierarchiczne procesy Markova znalazła też zastosowanie w obecnie opracowywanym modelu optymalizacji strategii użytkowania jałówek hodowlanych w stadzie bydła mięsnego. Wstępna wersja tego modelu została opisana w pracy Stygar i Makulskiej (2009). Założono w nim, że optymalna strategia użytkowania jałówek obejmuje decyzje dotyczące terminów krycia (miesiąc życia jałówki/masa ciała oraz miesiąc kalendarzowy),

metody krycia (inseminacja z synchronizacją rui, krycie haremowe) oraz intensywności żywienia w odchowcie jałówek (intensywne, ekstensywne). Jako kryterium optymalizacji przyjęto maksymalizację ekonomicznej efektywności odchowu jałówek – od jej urodzenia do skutecznego pokrycia.

Zaprezentowane przykłady modeli wskazują na możliwości szerokiego zastosowania modelowania i programowania matematycznego w zarządzaniu stadami bydła. W porównaniu z metodami tradycyjnymi stosowanymi w doradztwie, użycie modelowania i programowania matematycznego pozwala na równoczesne, ilo-

ściowe rozważenie większej liczby aspektów wpływających na analizowany proces, uwzględnienie niepewności posiadanych informacji oraz uzyskanie lepszego wglądu w przebieg i rezultaty procesu. Dzięki temu wybór optymalnych decyzji hodowlanych i produkcyjnych jest trafniejszy, co niewątpliwie przyczynia się do poprawy efektywności prowadzonej działalności. Należy jednak zaznaczyć, że opisane metody matematyczne powinny się traktować jako narzędzia wspomagające pracę hodowcy czy producenta, do którego zawsze należy podjęcie ostatecznej decyzji.

### Literatura

Bellman R.E. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton, Princeton University Press.

Bellman R.E., Dreyfus S.E. (1967). *Programowanie dynamiczne – zastosowanie*. PWE, Warszawa.

Houben E.H.P., Huirne R.B.M., Dijkhuizen A.A., Kristensen A.R. (1994). Optimal replacement of mastitis cows determined by a hierarchic Markov process. *J. Dairy Sci.*, 77: 2975–2993.

Howard R. (1960). *Dynamic Programming and Markov Processes*. The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.

Jalvingh A.W. (1992). The possible role of existing models in on-farm decision support in dairy cattle and swine production. *Livest. Prod. Sci.*, 31: 351–365.

Jędrzejczyk Z., Kukuła K., Skrzypek J., Walkosz A. (2004). *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. Wydanie piąte. Wyd. Nauk. PWN SA, Warszawa.

Kristensen A.R. (1987). Optimal replacement and ranking of dairy cows determined by a hierarchic Markov process. *Livest. Prod. Sci.*, 16: 131–144.

Kristensen A.R. (1988). Hierarchic Markov processes and their applications in replacement models. *Europ. J. Operation. Res.*, 35: 207–215.

Kristensen A.R. (1989). Optimal replacement and ranking of dairy cows under milk quotas. *Acta Agricult. Scand.*, 39: 311–318.

Kristensen A.R. (1994). A survey of Markov decision programming techniques applied to the animal replacement problem. *Europ. Rev. Agricult. Econ.*, 21: 73–93.

Kristensen A.R. (1996). Textbook notes of herd management: Dynamic programming and Markov decision processes. *Dina Notat*, No. 49.

Kristensen A.R. (2003). A general software system for Markov decision processes in herd management applications. *Comp. Electr. Agricult.*, 38: 199–215.

Kristensen A.R., Jørgensen E. (1998). Decision support models. *Dina KVL*, Royal Veterinary and Agricultural University, Copenhagen.

Makulska, J., Kristensen, A.R. (1999). Economic optimization of bull fattening. In: *Perspectives of Modern Information and Communication Systems in Agriculture, Food Production and Environmental Control*, European Federation for Information Technology in Agriculture, Food and the Environment, Bonn, Germany, ss. 443–449.

Mourits M.C.M., Huirne R.B.M., Dijkhuizen A.A., Kristensen A.R., Galligan D.T. (1999). Economic optimization of dairy heifer management decisions. *Agricult. Systems*, 61: 17–31.

Mourits M.C.M., Galligan D.T., Dijkhuizen A.A., Huirne R.B.M. (2000). Optimization of Dairy Heifer Management Decisions Based on Production Conditions of Pennsylvania. *J. Dairy Sci.*, 83: 1989–1997.

Nielsen B.K., Kristensen A.R. (2002). A model for simultaneous optimization of feeding level and slaughtering policy of organic steers. In: *First European Workshop on Sequential Decisions under Uncertainty in Agriculture and Natural Resources*. INRA, Toulouse, France, ss. 27–32.

Nielsen B.K., Kristensen A.R. (2007). Optimal decisions in organic beef production from steers – Effects

of criterion of optimality and price changes. *Livest. Sci.*, 110: 25–32.

Nielsen B.K., Kristensen A.R., Thamsborg S.M. (2004). Optimal decisions in organic steer production – a model including winter feed level, grazing strategy and slaughtering policy. *Livest. Prod. Sci.*, 88: 239–250.

Stygar A., Makulska J. (2009). Zastosowanie hierarchicznych procesów Markova do wyznaczania optymalnej strategii użytkowania jałówek hodowlanych w stadzie bydła mięsnego. *Rocz. Nauk. Zoot.*, 36, 1: 3–16.

Wentcel E. (1966). *Elementy programowania dynamicznego*. PWE, Warszawa.

## MATHEMATICAL MODELING AND PROGRAMMING IN HERD CATTLE MANAGEMENT

### Summary

Herd management requires taking many breeding and production decisions. Most beneficial decisions, taken based on accepted criteria, can be facilitated using mathematical programming and modeling methods. The model is a simplified representation of a system (farm, company, production process) used to detect quantitative relations between variables in the analysed system and to predict the effect of changes in the values of these variables. Models are solved and optimum decisions made using mathematical programming techniques. A special role among these techniques is played by dynamic programming extended with Hierarchic Markov Processes (HMP). This method is used to support economically optimal decisions concerning rearing and introduction of replacement heifers to dairy herds, data of insemination and rotation of dairy herd, as well as the course of individual and group bull fattening. The development of Multi-Level Hierarchic Markov Processes (MLHMP), in which the hierarchic structure of the model was extended with new levels, made it possible to solve more complex decision problems. The examples of using this method to support cattle herd management decisions include a model for optimization of fattening length and slaughter weight of bullocks, and efforts aimed at constructing a model for optimization of breeding heifer use strategy in a beef herd.



Bydło rasy Hereford (Łumpia) – *Hereford cattle (Łumpia)* (fot. B. Borys)